Dvokomponentni hidrodinamički modeli plazme

13

Uvodne napomene

- Dvokomponentna plazma = plazma koja se sastoji samo od elektrona i jedne vrste jona. Primer*: visokotemperaturna vodonična plazma*.
- Stepen jonizacije ovakve plazme je jednak jedinici, i neelastični sudari među njenim česticama su isključeni po definiciji.
- Ukoliko bi u plazmi postojali i neleastični sudari u takvoj meri da se to odražava na njeno makroskopsko ponašanje, ona ne bi bila dvokomponentna, već nužno višekomponentna.
- Neelastični sudari bi sa vremenom neminovno doveli do nastajanja novih vrsta čestica. Pojavili bi se neutrali (usled rekombinacije), višestruko naelektrisani joni, negativno naelektrisani joni, itd.

Polazne jednačine dvokomponentnih modela

- Dve komponente plazme (joni i elektroni) se tretiraju kao posebni fluidi.
- Hidrodinamičke veličine koje se odnose na jone i elektrone označavaćemo indeksima ***i*** i ***e*** respektivno.

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_i \mathbf{v}_i\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_e \mathbf{v}_e\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i \mathbf{v}_i\right) + \nabla \cdot \{\rho_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\} = -\nabla p_i + e_i n_i \left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}\right) + \mathbf{R}_{ie},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_e \mathbf{v}_e\right) + \nabla \cdot \{\rho_e \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e\} = -\nabla p_e - e_e n_e \left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}\right) + \mathbf{R}_{ei},$$

Karakteristicne jednacine za jone i elektrone

$$p_i = F(\rho_i),$$

$$P_e = F(\rho_e).$$

Gustina struje u dvokomponentnoj plazmi

- Gustina električne struje u dvokomponentnoj plazmi je data izrazom

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = e_i n_i \mathbf{v}_i - e n_e \mathbf{v}_e = e n_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$$

- Ovde je $e_i n_i = e n_e$
- U dvokomponentnim hidrodinamičkim modelima plazme nije potrebna nikakva dopunska relacija između gustine struje i vektora **E** i **B**, tipa Omovog zakona $\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$.
- Naprotiv, ovakva relacija automatski proizilazi iz jednačina kretanja, čim se konkretizuje oblik sila trenja $\mathbf{R}_{ie}$ i $\mathbf{R}_{ei}$, tj. čim se usvoji određeni dvokomponentni model.

Globalne hidrodinamičke jednačine za dvokomponentnu plazmu

- Uvešćemo globalne veličine za plazmu:

$$\rho = \rho_i + \rho_e \qquad \rho \mathbf{V} = \rho_i \mathbf{v}_i + \rho_e \mathbf{v}_e$$

- Sabiranjem jednačina kontinuiteta nalazimo *jednačinu kontinuiteta za plazmu kao celinu*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \mathbf{V}\right) = 0$$

- Slično, sabiranjem jednačina kretanja dobija se

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \mathbf{V}\right) + \nabla \cdot \{\rho_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\} + \nabla \cdot \{\rho_e \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e\} = -\nabla(p_i + p_e) + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

- Ovde je $\mathbf{j} = e n_e \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e\right)$
- Konačno se dobija jednačina kretanja dvokomponentne plazme kao celine:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \mathbf{V}\right) + \nabla \cdot \{\rho \mathbf{V}, \mathbf{V}\} + \frac{m_i m_e}{e\, e_i} \nabla \cdot \{\frac{1}{\rho} \mathbf{j}, \mathbf{j}\} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Analiza MHD aproksimacije

- Jednačina kretanja dvokomponentne plazme kao celine

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{V},\mathbf{V}\} + \frac{m_i m_e}{e\, e_i}\nabla\cdot\{\frac{1}{\rho}\mathbf{j},\mathbf{j}\} = -\nabla p + \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

- Korespodentna jednačina kretanja u MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\mathbf{v}) + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v},\mathbf{v}\} = -\nabla p + \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

- Lako se uočava da se osnovna razlika sastoji u zadnjem članu leve strane globalne jednačine kretanja. Ovaj član opisuje kako relativna brzijna jona u odnosu na elektrone utiče na kretanje plazme kao celine.
- MHD jednačina kretanja će adekvatno opisivati plazmu ako je posmatrani član vrlo mali u poređenju sa ostalim članovima.

Šliter-ov (Schlüter) dvokomponentni model plazme

- U ovom modelu sile trenja su svakoj su proporcionalne relativnoj brzini kretanja elektronskog i jonskog fluida u toj tački:

$$\mathbf{R}_{ie} = R n_i n_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \qquad \mathbf{R}_{ei} = R n_i n_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$$

- Konstanta proporcionalnosti R je u vezi sa kolizionim frekvencama

$$R = \frac{\tilde{m}}{n_e} \nu_{ie} = \frac{\tilde{m}}{n_i} \nu_{ei}$$

- Jednačine kretanja postaju

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \mathbf{v}_i) + \nabla \cdot \{\rho_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\} = -\nabla p_i + e_i n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \frac{m_e \nu_{ei}}{e} \mathbf{j},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_e \mathbf{v}_e) + \nabla \cdot \{\rho_e \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e\} = -\nabla p_e - e_e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) + \frac{m_e \nu_{ei}}{e} \mathbf{j}.$$

- Uvođenjem elektroprovodnosti plazme $\sigma = \dfrac{e^2 n_e}{m_e \nu_{ei}}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \mathbf{v}_i) + \nabla \cdot \{\rho_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\} = -\nabla p_i + e_i n_i \left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} - \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_e \mathbf{v}_e) + \nabla \cdot \{\rho_e \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e\} = -\nabla p_e - e_e n_e \left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}\right).$$

Omov zakon u Šliter-ovom modelu

- *Za domaći:* naći vezu između gustine struje, hidrodinamičkih veličina i polja **E** i **B** u dvokomponentnim hidrodinamičkim modelima
- *Napisati izraz za tenzor provodnosti u Šliterovom modelu plazme.*

Uputsvo

- Polazi se od jednačina kretanja jonskog i elektronskog fluida;
- Rezultat će zavisiti od konkretnog oblika sila trenja $\mathbf{R}_{ie}$ i $\mathbf{R}_{ei}$
- U Schluter-ovom modelu:

$$\mathbf{R}_{ie} = R n_i n_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \ \mathbf{R}_{ei} = R n_i n_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$$

- Brzine jonskog i elektronskog fluida:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \frac{m_e}{e\rho}\mathbf{j}, \ \mathbf{v}_e = \mathbf{V} - \frac{m_i}{e_i \rho}\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot [\{e_i n_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\} - \{e n_e \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e\}] = \nabla\left(\frac{e}{m_e} p_e - \frac{e_i}{m_i} p_i\right) + \left(\frac{e^2 n_e}{m_e} + \frac{e_i^2 n_i}{m_i}\right)\mathbf{E} +$$

$$+\left(\frac{e^2 n_e}{m_e}\mathbf{v}_e + \frac{e_i^2 n_i}{m_i}\mathbf{v}_i\right) \times \mathbf{B} - \left(\frac{e^2 n_e}{m_e} + \frac{e_i^2 n_i}{m_i}\right)\frac{1}{\sigma}\mathbf{j}.$$

- Uprošćavanje jednačine: zanemarivanje svih članova reda m_e / m_i što je ekvivalentno odbacivanju svih jonskih članova sa desne strane gornje jednačine i uzimanjem približnih vrednosti za brzine jonskog i elektronskog fluida

$$\mathbf{v}_i \sim \mathbf{V}, \ \mathbf{v}_e \sim \mathbf{V} - \frac{1}{e n_e}\mathbf{j}$$

“Generalisani ” Ohm-ov zakon za plazmu

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}\right) + \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \nabla p_e - \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\nu_{ei}} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

- Uporediti sa Ohm-ovim zakonom u MHD

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}\right) + \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \nabla p_e - \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \mathbf{j} \times \mathbf{B} =$$

$$= \sigma \mathbf{E}^* - \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Implicitna veza između **j** i **E***

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^* - \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

- Prisustvo Hall-ovog člana **j**x**B** ukazuje da eksplicitna veza između **j** i **E*** mora biti u obliku

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{E}^*$$

- Nalaženje tenzora provodnosti dvokomponentne plazme
- Projektovati jednačinu $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^* - \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ na ose Decartes-ovog koordinatnog sistema i zatim izračunati komponete vektora **j** u tom koordinatnom sistemu.

Rešenja za komponente gustine struje **j**

$$j_x = \frac{1}{1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2}\sigma \mathrm{E}_x^* - \frac{|\omega_{Be}|\tau_{ei}}{1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2}\sigma E_y^*,$$

$$j_y = \frac{|\omega_{Be}|\tau_{ei}}{1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2}\sigma \mathrm{E}_x^* + \frac{1}{1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2}\sigma E_y^*,$$

$$j_z = \sigma E_z^*.$$

- Diskusija rešenja:
- 1) Ako je $|\omega_{Be}|\tau_{ei} \ll 1$ elektroni će biti nezamagnetisani, dobija se:

$$j_x \approx \sigma \mathrm{E}_x^*$$

$$j_y \approx \sigma E_y^*,$$

$$j_z = \sigma E_z^*.$$

- 2) Ako je $|\omega_{Be}|\tau_{ei} \gg 1$ elektroni su zamagnetisani i fizička slika postaje znatno interesantnija

2.1. Pretpostavimo najpre da je efektivno električno polje E* kolinearno sa magnetnim poljem:

$$E_x^* = E_y^* = 0, E_z^* \neq 0$$

tada je $$j_x = j_y = 0, j_z = \sigma E_z^*$$

- **Struja u plazmi teče samo u pravcu primenjenog električnog polja i Hall-ov efekat se ne ispoljava. Elektroporvodnost je ista kao i u odsustvu magnetnog polja.**

2.2. Uzmimo sada da je primenjeno električno polje normalno na magnetno polje

$$E_x^* \neq 0, E_y^* = E_z^* = 0.$$

$$j_x = \frac{1}{1+\omega_{Be}^2 \tau_{ei}^2} \sigma \mathrm{E}_x^*, \quad j_y = \frac{|\omega_{Be}| \tau_{ei}}{1+\omega_{Be}^2 \tau_{ei}^2} \sigma \mathrm{E}_x^*, \quad j_z = 0.$$

Pored osnovne komponente (u pravcu primenjenog polja), javlja se Hall-ova komponenta električne struje (normalno na primenjeno električno polje i na magnetsko polje).

Električna provodnost koja odgovara osnovnoj komponenti je znatno manja od provodnosti plazme van magnetnog polja. Električna provodnost kod Hall-ove komponente je

$$|\omega_{Be}| \tau_{ei}$$

puta veća od osnovne – električna struja praktično teče normalno na spoljašnje električno polje.

Osnovna komponenta struje, Hall-ova komponenta i magnetno polje

Tenzor provodnosti

$$\hat{\sigma} = \sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2} & -\frac{|\omega_{Be}|\tau_{ei}}{1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2} & 0 \\ \frac{|\omega_{Be}|\tau_{ei}}{1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2} & \frac{1}{1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Prisustvo magnetnog polja s jedne strane ne menja električnu provodnost plazme u pravcu z ose (to je pravac magnetnog polja), a sa druge strane smanjuje provodnost u pravcu x i y ose $1+\omega_{Be}^2\tau_{ei}^2$ puta (normalno na magnetno polje)

Idealna (bezkoliziona) plazma

- Dovoljno je izvršiti granični prelaz

$$\nu_{ei} \to 0$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}\right) + \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \nabla p_e - \frac{e}{m_e \nu_{ei}} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{1}{e n_e} \nabla p_e - \frac{1}{e n_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = rot\left(\mathbf{V} \times \mathbf{B}\right) - rot\left(R\left(\nabla p_e + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times rot\mathbf{B} \right)\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = rot\left(\mathbf{V} \times \mathbf{B}\right) - \frac{1}{\mu_0} R\, rot\left(\mathbf{B} \cdot \nabla\right)\mathbf{B}$$